



**FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING
AND INFORMATION SCIENCE**



**INFORMATION TECHNOLOGY AND
ELECTRICAL ENGINEERING -
DEVICES AND SYSTEMS,
MATERIALS AND TECHNOLOGIES
FOR THE FUTURE**

Startseite / Index:

<http://www.db-thueringen.de/servlets/DocumentServlet?id=12391>

Impressum

Herausgeber: Der Rektor der Technischen Universität Ilmenau
Univ.-Prof. Dr. rer. nat. habil. Peter Scharff

Redaktion: Referat Marketing und Studentische
Angelegenheiten
Andrea Schneider

Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
Susanne Jakob
Dipl.-Ing. Helge Drumm

Redaktionsschluss: 07. Juli 2006

Technische Realisierung (CD-Rom-Ausgabe):
Institut für Medientechnik an der TU Ilmenau
Dipl.-Ing. Christian Weigel
Dipl.-Ing. Marco Albrecht
Dipl.-Ing. Helge Drumm

Technische Realisierung (Online-Ausgabe):
Universitätsbibliothek Ilmenau
[ilmedia](#)
Postfach 10 05 65
98684 Ilmenau

Verlag:  Verlag ISLE, Betriebsstätte des ISLE e.V.
Werner-von-Siemens-Str. 16
98693 Ilmenau

© Technische Universität Ilmenau (Thür.) 2006

Diese Publikationen und alle in ihr enthaltenen Beiträge und Abbildungen sind urheberrechtlich geschützt. Mit Ausnahme der gesetzlich zugelassenen Fälle ist eine Verwertung ohne Einwilligung der Redaktion strafbar.

ISBN (Druckausgabe): 3-938843-15-2
ISBN (CD-Rom-Ausgabe): 3-938843-16-0

Startseite / Index:
<http://www.db-thueringen.de/servlets/DocumentServlet?id=12391>

Dipl.-Ing. Marco Reinhard

Nachbildung einer realen Spule unter Einsatz der fraktionalen Differenziation

ABSTRACT

In der Realität entstehen aufgrund von Temperatur- und Frequenzabhängigkeiten des Materials, durch Verschiebungsströme oder Induktion Abweichungen vom idealen Zustand. Daher werden Ersatzschaltbilder mit idealen Bauelementen wie Widerstand, Kapazität und Induktivität oder mit nichtlinearen Beschreibungen erstellt. Einen neuen Weg zur Kompensation der Abweichungen stellt die fraktionale Differenzialrechnung dar.

EINLEITUNG

In der Elektrotechnik besitzt die Verwendung von sinusförmigen Signalen einen übergeordneten Stellenwert und es greift dabei zur Beschreibung von Signalen oder Bauelementen die komplexe Schreibweise. Damit besitzen der ohmsche Widerstand R und die Induktivität L^* die komplexen Widerstände:

$$\underline{Z}_R = (j\omega)^0 \cdot R \quad \dots \quad \underline{Z}_{L^*} = (j\omega)^1 \cdot L^* . \quad (1)$$

Dabei treten für die Potenz von $j\omega$ ausschließlich ganzzahlige Werte auf und es stellt sich die Frage, was sich dazwischen befindet.

FRAKTIONALE ABLEITUNG

Um diese Frage zu beantworten, bedarf es der Anwendung der fraktionalen Ableitung nach Beyer und Kempfle mit der Fourier-Transformation (\mathcal{FT}). Demnach besitzt die fraktionale Ableitung der Funktion $f(t)$ nach der Zeit t mit der Ordnung p die Form:

$$\frac{d^p f(t)}{dt^p} = \mathcal{FT}^{-1} \left\{ (j\omega)^p \mathcal{FT} \{ f(t) \} \right\} \quad \text{mit: } p \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Mit dem Ausdruck $(j\omega)^p$ spiegeln sich die ganzzahligen Ableitungen des Stromes i für die Werte $p = 0$ und $p = 1$ und somit die komplexen Widerstände für R und L^* wieder. Daraufhin wird der komplexe Widerstand \underline{Z}_ξ mit dem Parameter ξ und der Ordnung p_ξ eingeführt:

$$\underline{Z}_\xi = (j\omega)^{p_\xi} \cdot \xi \quad \text{mit: } p_\xi, \xi \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

NACHBILDUNG EINER REALEN SPULE

Zur Approximation des Verhaltens einer realen Luftspule unter Zuhilfenahme der fraktionalen Differenziation wurde die Übertragungsfunktion eines realen RL^* -Hochpass im Frequenzbereich $f = 10 \dots 3000$ Hz ausgemessen. Zum Einsatz kamen das Zweikanal-AC-Millivoltmeter GVT 427

und der digitale Phasenmesser DPM 609. Aufgrund der mehrfach ausgeführten Messungen wurden nur die systematischen Messfehler am GVT 427 mit $\pm 2\%$ und am DPM 609 mit $\pm 0,1^\circ$ einbezogen.

Die reale Spule \underline{Z}_{L^*} wurde zum Vergleich durch ein fraktionales Element \underline{Z}_ξ gemäß Abbildung 1 ersetzt. Das Element R_ξ entspricht dem resistiven Anteil der Spule.

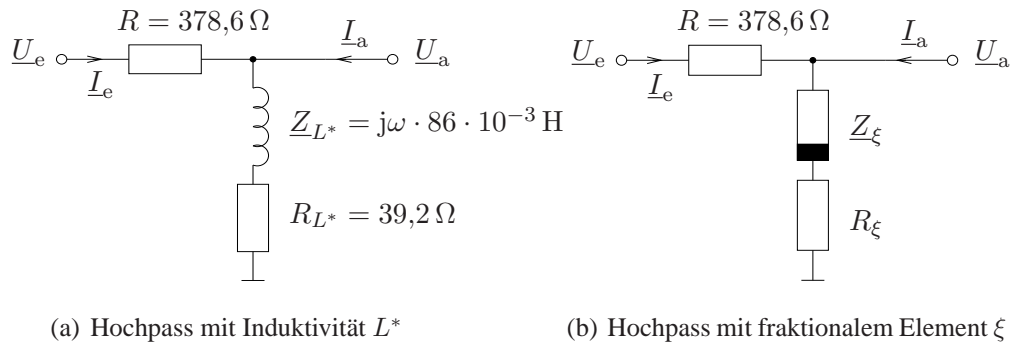


Abb. 1: Realer RL^* -Hochpass mit Induktivität L^* und mit fraktionalem Element ξ

Die beiden Übertragungsfunktionen der Hochpässe besitzen die Form:

$$\underline{H}_{RL^*} = \frac{R_{L^*} + j\omega L^*}{R + R_{L^*} + j\omega L^*}, \quad \underline{H}_{R\xi} = \frac{R_\xi + (j\omega)^{p_\xi} \xi}{R + R_\xi + (j\omega)^{p_\xi} \xi}. \quad (4)$$

Beim Vergleich mehrerer Verfahren dominierte die Optimierung nach dem »Goldenen Schnitt«. Darüber ergaben sich für die Parameter R_ξ , ξ und p_ξ aus (3) die Werte:

$$\underline{Z}_\xi = (j\omega)^{p_\xi} \cdot \xi \approx (j\omega)^{1,004} \cdot 66,922 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Vs}^{1,004}}{\text{A}}, \quad (5)$$

$$R_\xi \approx 34,477 \Omega. \quad (6)$$

Die reale Luftspule besitzt daher nicht die Ordnung eins, sondern knapp darüber mit $p_\xi \approx 1,004$.

Zusammenfassung

Mit dem Einsatz der fraktionalen Differenziation war eine Reduzierung der Abweichung im Schnitt auf unter 2 % möglich. Bei der alleinigen Anpassung der Parameter R_{L^*} und L^* nach (4) lag die Abweichung noch über 3 %. Daher empfiehlt es bei geforderter Genauigkeit einen Einsatz der fraktionalen Differenziation. Vor allem bei der Verwendung von Kernmaterialien können die Ordnungen p deutlich von eins abweichen und müssen daher beachtet und auch genutzt werden.

Literatur- bzw. Quellenhinweise:

- [1] Oldham, K. B.; Spanier, J.: *The fractional calculus*, New York, Academic Press, 1974.
- [2] Miller, K.; Ross, B.: *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, New York, John Wiley & Sons, 1993.

Autorenangabe:

Marco Reinhard
 99869, Goldbach
 Tel.: 036255 82133
 E-mail: marco_reinhard@freenet.de